(arqus)

Arbeitskreis Quantitative Steuerlehre

Quantitative Research in Taxation – Discussion Papers

Marcus Becker / Andreas Löffler

Arbitrage And Nonlinear Tax Scales

arqus Discussion Paper No. 205

April 2016

www.arqus.info

ISSN 1861-8944

Arbitrage And Nonlinear Tax Scales

Marcus Becker and Andreas Löffler*

12. April 2016 (First Draft)

Abstract

We look at the theory of arbitrage with taxation under certainty. The tax scale in our model is not linear. Under the premise that tax scale is convex, we analyze prices that do not exhibit arbitrage opportunities.

It turns out that there are two kinds of arbitrage: unbounded as well as bounded arbitrage. With bounded arbitrage, the gain from forming an arbitrage portfolio is bounded from above and cannot increase infinitely. In a model with a linear tax scale such a bounded arbitrage cannot exist, all arbitrage portfolios will generate an infinite gain from trade.

In contrast to earlier research, we are able to give a complete characterization (i.e., if and only if) whether bounded as well as unbounded arbitrage opportunities will occur only relying on market prices and properties of the tax scale. This characterization relies on so-called implicit tax rates that are defined by a simple relation copied from the case of linear tax scales.

Keywords

No-Arbitrage with Taxation, Fundamental Theorem of Asset Pricing, Non-Linear Tax Codes, Application of Convex Optimization Problems

JEL Classification Numbers

C61, E62, G12, H24

*Department of Banking and Finance, Freie Universität Berlin.

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

1.1. Problemstellung

Finanzierungstheorie ist heutzutage ohne Steuern kaum noch denkbar. Seit der denkwürdigen Arbeit von Modigliani und Miller (1963) wurde die Frage, welchen Einfluss Steuern auf Investitionsentscheidungen haben, immer wieder diskutiert. Während zunächst die Unternehmenssteuer (Körperschaftsteuer) mit ihren Vorteilen für die Fremdfinanzierung und die Ermittlung des Tax Shields im Vordergrund standen, wendet man sich zunehmend der Unternehmersteuer (Einkommensteuer) zu. Da eine Einkommensteuer auch die Alternativinvestition beeinflusst, ist die Analyse der Steuereffekte hier komplizierter.

Schaut man auf die wichtigsten betriebswirtschaftlichen Arbeiten zum Einfluss der Einkommensteuer auf Wertpapierpreise, so fällt auf, dass in nahezu allen Arbeiten der Finanzierungstheorie ein konstanter Steuersatz unterstellt wird, was einer in der Bemessungsgrundlage linearen Steuerschuld entspricht.[1] Die Linearitätsforderung wird verwendet, weil bequemerweise derselbe formale Apparat wie im Falle ohne Steuer angewandt werden kann.

Steuertarife sind aber nicht Ergebnis einer wissenschaftlichen Abstraktion, sondern werden vom Gesetzgeber festgelegt. Uns ist weltweit keine Steuerschuldfunktion bekannt, die völlig linear ist. Existierende Steuerschuldfunktion sind beispielsweise stückweise linear (die Steuersätze wechseln ab einer bestimmten Bemessungsgrundlage, siehe etwa die amerikanische federal income tax 2015), oder die Steuersätze sind selbst affin-lineare Funktionen der Bemessungsgrundlage (siehe etwa die Einkommensteuer in Deutschland 2015) oder es gibt Freibeträge, die die Linearität einer Steuerschuldfunktion zerstören (so zum Beispiel bei der Abgeltungsteuer in Deutschland 2015). Linearität bei rechtsgültigen Steuerschuldfunktionen zu unterstellen ist also eine sehr problematische Annahme.

Die von uns genannten Beispiele rechtsgültiger Steuerfunktionen (Freibeträge, affinelineare Steuern und Sprünge beim Steuersatz) haben die gemeinsame Eigenschaft, dass der Steuerschuldverlauf konvex ist. Diese Einschränkung werden wir im Folgenden in einer stilisierten Steuerfunktion aufgreifen. Wir werden untersuchen, welchen Einfluss eine nichtlineare, aber *konvexe* Funktion der Bemessungsgrundlage auf die Investitionsentscheidung ausübt. Weitere gravierende Einschränkungen des funktionalen Verlaufes der Steuerschuld werden wir nicht vornehmen, unsere weiteren Annahmen werden eher technischer Natur sein.

[1] Zwei Beispiele mögen dies illustrieren. In Brennan (1970) lesen wir: "... we assume for simplicity that each investor has marginal tax rates on dividend and capital gains income t_{di}, and t_{gi} which are constant and independent of his portfolio choice." Analog schreibt Bradford (2000): "Linearity is a desideratum of a tidy tax system."

Die Technik der konvexen Optimierung wird es uns weiter gestatten, eine bislang in der Literatur weitgehend vernachlässigte Frage zu diskutieren: Welchen Einfluss üben nichtlineare (konvexe) Steuersysteme auf die Preise von Wertpapieren aus? Die genaue Natur dieses Einflusses aber wurde bisher nur in sehr wenigen Arbeiten untersucht. Hier setzen wir an. Wir wollen klären, welche Preise sich mit einer Kapitalmarktsituation vertragen, wenn Freibeträge vorliegen oder Steuersätze nicht konstant verlaufen, sondern zum Beispiel Sprünge aufweisen. Dazu bedienen wir uns der Theorie arbitragefreier Kapitalmärkte.

Die Theorie arbitragefreier Kapitalmärkte hat, im Vergleich zur Gleichgewichtstheorie, den Vorteil mit sehr wenigen Annahmen auszukommen und sie ist aus eben diesem Grund in der Finanzwirtschaft nahezu uneingeschränkt akzeptiert. Während bei einer Gleichgewichtsbetrachtung individuelle Nutzenfunktionen und vor allem Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen eines Gleichgewichtes bewiesen werden müssen, argumentiert die Theorie arbitragefreier Märkte zuerst aus dem Blickwinkel eines einzigen Investors und prüft, ob die Preise der handelbaren Titel Inkonsistenzen aufweisen. Dabei werden Strategien und Handelsmöglichkeiten gesucht, die zu einem unbeschränkten Reichtum führen können – solche Strategien nennt man Arbitragen. Wenn derartige Handelsmöglichkeiten existieren, dann verlieren Budgetbeschränkungen durch die Möglichkeit, sein "eigenes Geld zu drucken", ihren Sinn. Ein Kapitalmarktmodell mit Arbitragemöglichkeiten ist nicht mehr in sich konsistent, auch Gleichgewichte können im Allgemeinen so nicht mehr existieren. Daher haben wir uns entschieden, den Einfluss konvexer Steuern in einem Arbitragemodell zu diskutieren.

Konkret beantworten wir in dieser Arbeit die Frage, wann bei konvexen Steuerschuldfunktionen Arbitragegelegenheiten entstehen können und wann man sie ausschließen kann. Insbesondere arbeiten wir heraus, welcher Zusammenhang zwischen den Eigenschaften der Steuerschuldfunktion und dem Fehlen von Arbitragegelegenheiten besteht. In der Literatur konnte diese Frage bisher nicht ausreichend beantwortet werden.

Eine solche Antwort ist von großer praktischer Relevanz. Will man ein Unternehmen bewerten, so können steuerliche Einflüsse und insbesondere die Wirkung einer Einkommensbesteuerung nicht vernachlässigt werden. In Deutschland hat sich das Institut der Wirtschaftsprüfer nach langer und intensiver Debatte entschlossen, im Fall der Bewertung von Unternehmen grundsätzlich die Berücksichtigung einer Einkommensteuer vorzuschreiben (siehe insbesondere Siepe (1997) und Siepe (1998) und die Diskussion dauert bis heute an, wie Ballwieser, Kruschwitz und Löffler (2007) zeigt). Da die deutsche Einkommensteuer einen progressiven Tarif besitzt und der, streng genommen, von 0% bis zu fast 50% verläuft, begann eine intensive Debatte darüber, welcher Steuersatz oder welche Bemessungsgrundlage denn die korrekte sei. Intuitiv erscheinen sowohl Grenz- als auch Durchschnittssteuersätze angemessen, aber selbst empirische Analysen konnten nicht ohne Weiteres herausarbeiten, ob es einen "natürlichen" Steuersatz gibt, der hier besonders zweckmäßig oder begründet wäre (siehe zum Beispiel Heintzen u.a. (2008)).[2] Preise, die Arbitragegelegenheiten ermöglichen, kann man nicht als wissenschaftliche fundiert bezeichnen. Unsere Arbeit wird, aufbauend auf der Arbitragetheorie mit konvexen Steuern, ein theoretisch belastbares Argument dafür liefern, dass der Grenzsteuersatz bei einer Bemessungsgrundlage von null der einzige akzeptable anzuwendende Steuersatz ist. Da Auseinandersetzungen zur Unternehmensbewertung bei squeeze-outs in Deutschland nicht selten vor Gerichten ausgetragen werden und es oft um große Summen geht, sind derartige Argumente von unmittelbar praktischer Bedeutung.

1.2. Literatur

Auswirkungen von Steuern auf Preise von Wertpapieren (und damit auch auf Investitionsentscheidungen) wurden in der Vergangenheit durchaus untersucht. Wir wollen daher verdeutlichen, welche Zusammenhänge zwischen unserer Arbeit und der bereits existierenden Literatur bestehen.

Schaefer (1982) ist einer der ersten, der einen nichtlinearen Tarif in Investitionsentscheidungen analysiert. Er konzentriert sich ausschließlich auf risikofreie Wertpapiere (Bonds). Anhand eines Beispiels mit zwei Investoren zeigt er, dass Gleichgewichtspreise nur existieren können, wenn die Grenzsteuersätze beider Investoren übereinstimmen. Wenn die Diskontierungssätze für verschiedene Investoren nicht eindeutig sind, so wird es zwangsläufig Arbitragemöglichkeiten und damit kein Gleichgewicht geben. Um dieses Dilemma aus der Welt zu schaffen, erreicht Schaefer durch ein Verbot von Leerverkäufen (Short-Sales).

Nach unserer Ansicht weist Schaefers Modell eine fundamentale Schwäche auf. Nach Schaefer muss die Grenzsteuerfunktion eindeutig sein: Es gibt also zu zwei voneinander abweichenden Bemessungsgrundlagen immer verschiedene Grenzsteuersätze. Das ist aber nur möglich, wenn die Grenzsteuersätze streng monoton wachsend sind (woraus, wie wir hier zeigen werden, die strenge Konvexität der Steuerschuld folgt).

Eine wichtige Arbeit zum Zusammenhang von Arbitragemöglichkeiten und Steuern stammt von Ross (1987). Ross formuliert einen Fundamentalsatz für beliebige, also sowohl risikolose als auch riskante Finanztitel. Cashflows bilden dabei die Bemessungsgrundlage einer konvexen Steuer. Ross unterscheidet nun zwischen lokaler und globaler

[2] Das Institut der Wirtschaftsprüfer hat sich seinerzeit entschlossen, hier typisierend einen Steuersatz von 35% vorzugeben. Weshalb dieser Steuersatz angemessen sei, wurde nicht ausgeführt.

Arbitragemöglichkeit. Ein Portfolio stellt eine lokale Arbitragegelegenheit dar, falls dieses Portfolio, gegeben die Erstausstattung eines spezifischen Investors, eine klassische Arbitragemöglichkeit (im Sinne höherer Entnahmen) darstellt. Für einen anderen Investor mit einer anderen Erstausstattung muss es sich dagegen nicht um eine Arbitragemöglichkeit handeln. Eine globale Arbitragemöglichkeit liegt vor, falls für jedes beliebige Portfolio eine lokale Arbitrage existiert.

Auf den ersten Blick scheint der Begriff der lokalen Arbitragemöglichkeiten weniger restriktiv zu sein. Umgekehrt ist die Forderung nach Abwesenheit lokaler Arbitragegelegenheiten eine stärkere Einschränkung als die Abwesenheit globaler Arbitragen. Ross zeigt, dass die Abwesenheit lokaler Arbitragen sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung ist für die Existenz von Zustandspreisen (Arrow-Debreu-Preisen) und damit risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten. Ross behauptet darüber hinaus, dass sich seine Resultate ohne Weiteres auf ein mehrperiodiges Modell übertragen lassen. Die damit zusammenhängenden Probleme sind allerdings nicht einfach. Zudem zeigt sich bei genauerer Analyse, dass auch Ross nicht ohne eine Vereinfachung bei der Steuerfunktion auskommt: Ross gelingt der Beweis des Fundamentalsatzes nur für stückweise lineare Steuerfunktionen.[3] Damit wäre beispielsweise seine Theorie auf den Fall der deutschen Einkommensteuer 2015, die zum Teil eine quadratische Steuerschuldfunktion aufweist, nicht anwendbar.

Prisman (1986) hat zeitgleich mit Ross (1987) ebenfalls Arbitragemöglichkeiten bei konvexen Steuerschuldfunktionen untersucht (Prisman führt zudem Transaktionskosten in sein Modell ein, worauf wir verzichten). Prisman nutzt die Dualitätstheorie der konvexen Optimierung, die wir in der vorliegenden Arbeit auch anwenden werden. Prisman gelingt es jedoch nicht, diejenigen Preise, die Arbitragegelegenheiten erzeugen, durch Eigenschaften der Steuerschuldfunktion eindeutig zu charakterisieren.

Sowohl Dybvig und Ross (1986) als auch Dammon und Green (1987) zeigen, dass bei der Einführung nichtlinearer Steuern so genannte Klienteleffekte auftreten können. Dammon und Green (1987) setzen dazu voraus, dass die Cashflows der einzelnen Wertpapiere in Abhängigkeit des jeweiligen Zustandes mit einem investorspezifischen Tarif besteuert werden. Im Ergebnis halten Investoren aus unterschiedlichen Steuerklassen im Gleichgewichtszustand unterschiedliche Portfolioanteile. Dieses Resultat gilt sowohl mit als auch ohne Leerverkaufsbeschränkungen. Eine Analyse, welche Preise Arbitragegelegenheiten erzeugen und wann diese ausgeschlossen werden können, geben die Autoren aber nicht an.

Gallmeyer und Srivastava (2011) untersuchen ebenfalls Arbitragegelegenheiten bei Vor-

[3] Siehe hierzu Lemma 5 und Annahme T in Ross (1987, S. 387 sowie S. 392).

handensein einer Steuer. Sie widmen sich aber einer Kursgewinnbesteuerung und unterstellen einen linearen Tarif.

Dermody und Rockafellar (1991) analyiseren nichtlineare Steuern (sowie Transaktionskosten). Sie gehen vereinfachend davon aus, dass zukünftige Steuerzahlungen nur vom Preis der jeweiligen Wertpapiere abhängen, nicht jedoch von der Handelsstrategie. Dies ist in mehrfacher Hinsicht problematisch. Zum einen unterliegen Tilgungszahlungen eines Kredites nicht einer Einkommensteuer, was im Modell von Dermody und Rockafellar (1991) schlichtweg ignoriert werden muss. Zum anderen könnte ein Investor durch eine geschickte Handelsstrategie Steuern vermeiden, was Dermody und Rockafellar (1991) mit ihrem Modell aber ausschließen müssen. Da zudem Kauf- und Verkaufspreis, wie bei Prisman (1986), nicht identisch sind, kommen die Autoren in ihrem Modell zu dem Schluss, dass Diskontierungsfaktoren im Allgemeinen nicht eindeutig sind: "There are strong mathematical reasons for believing that the nonuniqueness indicates underlying nonlinearities in the behavior of value that cannot be captured by a single term structure" (S. 32). Wir werden zu anderen Ergebnissen gelangen und eine eindeutige *term structure* identifizieren, die einen klaren Zusammenhang zur Steuerschuldfunktion aufweist.

1.3. Ergebnisse der Arbeit

Wir untersuchen ein T-Perioden Modell, in dem risikolose Anleihen gehandelt werden und werfen die Frage auf, wann eine arbitragefreie Bewertung eines beliebigen Bonds möglich ist. Diese Bewertung gelingt durch Replikation vorhandener Titel. Aufgrund der Arbitragefreiheit müssen Handelsstrategien, die identische Nettoauszahlungen haben, auch identische Preise aufweisen. Dabei wird sich zeigen, dass uns die Nichtlinearität der Steuerfunktion zu einer Anpassung des in der Literatur verwendeten Arbitragebegriffes zwingt.

Typischerweise ist eine Arbitragemöglichkeit beliebig skalierbar. Wer eine Handelsstrategie findet, mit der eine Einzahlung ohne Auszahlungen realisiert wird, kann eine solche Möglichkeit auf beliebigem Niveau durchführen – und damit dann auch unendlich reich werden. Wenn dagegen nichtlineare Steuern existieren, liegen die Dinge anders. In einer solchen Situation kann es passieren, dass eine Arbitragemöglichkeit zwar zu einer bestimmten Einzahlung $K < \infty$ führt, ohne dass Auszahlungen notwendig sind. Wird die Strategie nun auf noch höherem Niveau durchgeführt, führt dies nicht zu höheren Einzahlungen als K. Vielmehr kann es sein, dass K der höchste erzielbare Arbitragegewinn bleibt.

Daher müssen wir zwischen unbeschränkten (d.h. klassischen) und *beschränkten* Arbitragegelegenheiten unterscheiden. Unserer Ansicht nach führen unbeschränkte Arbitragemöglichkeiten nach wie vor dazu, dass das ökonomische Modell widersprüchlich wird. Wenn beliebige Finanzmittel aus dem Nichts geschaffen werden können, verliert jede Budgetrestriktion ihren Sinn. Damit kann man dann auch nicht behaupten, durch einen Nutzenmaximierungskalkül würde menschliches Verhalten beschrieben. Bei einer beschränkten Arbitragemöglichkeit ist dies jedoch anders. Eine solche Handelsmöglichkeit führt erst einmal nur dazu, dass der homo oeconomicus jede denkbare Option ausnutzt und unter diesen Bedingungen seine optimale Strategie wählt. Dies bedeutet keinesfalls, dass sich der Nutzenmaximierungskalkül selbst ad absurdum führt.

Allerdings glauben wir, dass beschränkte Arbitragemöglichkeiten dennoch problematisch sind. Dies zeigt sich insbesondere im Gleichgewicht, weil dort Angebot und Nachfrage nach Finanztiteln ausgeglichen sein muss. Wir glauben, dass in einem Gleichgewicht keine beschränkten Arbitragemöglichkeiten möglich sein dürfen. Denn wäre dies der Fall, würde ein Investor im Gleichgewicht (gemessen an den Gleichgewichtspreisen) mehr nachfragen, als es seine Erstausstattung erlaubt. Wenn nun die anderen Investoren ihre Budgetbedingungen nicht verletzen, ist wegen des Arbitragegewinns trotzdem der Wert aller Nachfragen größer als der Wert aller Erstausstattungen. Das aber widerspricht der Annahme, dass wir es mit einem Gleichgewicht zu tun haben. Daher sind wir davon überzeugt, dass Gleichgewichtspreise weder beschränkte noch unbeschränkte Arbitragegelegenheiten zulassen dürfen.

Wir werden in unserer Arbeit notwendige und hinreichende Bedingungen angeben, welche Wertpapierpreise beschränkte sowie unbeschränkte Arbitragemöglichkeiten zulassen. Dazu werden wir zuerst aus den Preisen von Wertpapieren so genannte implizite Steuersätze ableiten, die man sich wie folgt als Linearisierung der Steuerschuldfunktion in einer Bewertungsgleichung vorstellen kann: Wenn für ein Wertpapier im Zeitpunkt t der Handelspreis mit p_t bezeichnet wird, x_t den Cashflow und a_t die Differenz aus Cashflow und Bemessungsgrundlage der Einkommensteuer im Zeitpunkt t darstellen, dann folgt bei linearen Steuern in Höhe von τ auf arbitragefreien Märkten bekanntlich[4]

$$p_t = \frac{p_{t+1} + x_{t+1} - \tau \cdot (x_{t+1} - a_{t+1})}{1 + r_f \cdot (1 - \tau)}.$$

Bei konvexen Steuerschuldfunktionen ist nicht unmittelbar einsichtig, welcher Steuersatz τ hier anzuwenden ist. Daher werden wir den eindeutig bestimmten Steuersatz, der bei gegebenen Preisen diese Gleichung erfüllt, hervorheben und *impliziten Steuersatz* nennen. Es gibt für jeden Zeitpunkt $t = 0, \ldots, T-1$ einen solchen impliziten Steuersatz τ_t für das zu bewertende Wertpapier. Die impliziten Steuersätze τ_t hängen von den Wertpapierpreisen, den Cashflows und den Bemessungsgrundlagen ab und da sie sich als Lösung

[4]Siehe zum Beispiel Ross 1987, S. 380.

einfacher linearer Gleichungen ergeben, ist nicht von vornherein klar, dass sie mit einem Grenz- oder Durchschnittssteuersatz der Funktion $T(\cdot)$ übereinstimmen oder im Intervall $[0, 1]$ liegen. Fordern wir sehr plausible Einschränkungen an die Steuerschuldfunktion, dann können wir aber mit Hilfe dieser impliziten Steuersätze Folgendes beweisen:

- Die Preise der Wertpapiere sind genau dann arbitragefrei, wenn alle impliziten Steuersätze den Grenzsteuersätzen der Funktion $T(\cdot)$ entsprechen, die sich bei der Bemessungsgrundlage null einstellen.
- Die Preise der Wertpapiere erlauben genau dann unbeschränkte Arbitragemöglichkeiten, wenn mindestens ein impliziter Steuersatz einen Wert annimmt, der in der Steuerschuldfunktion $T(\cdot)$ als ein möglicher Grenzsteuersatz (für eine beliebige Bemessungsgrundlage) nicht auftaucht.
- In allen anderen Fällen erlauben die Preise beschränkte Arbitragemöglichkeiten.

Wir werden dieses Ergebnis an drei Steuerschuldfunktionen beispielhaft erläutern.

Unser Ergebnis ist intuitiv nicht ganz einfach zu verstehen. Wir werden daher zeigen, dass unser Ergebnis eine starke Analogie zu der Diskussion von Grenz- und Durchschnittskosten in der klassischen Produktionstheorie aufweist. Aus der Produktionstheorie weiß man, dass ein optimales Programm genau dann gegeben ist, wenn Grenz- und Durchschnittskosten identisch sind.[5] Es wird sich zeigen, dass die Existenz von Arbitragemöglichkeiten auf diese Überlegung übertragen werden kann. Arbitragegelegenheiten existieren, wenn Grenz- und Durchschnittssteuersätze einer Steuerschuldfunktion auseinanderfallen, weil Investoren über den Kapitalmarkt ihre Steuerzahlungen optimieren können.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. In Abschnitt 2 führen wir die Grundbegriffe für konvexe Steuerfunktionen ein. In Abschnitt 3 definieren wir einen erweiterten Arbitragebegriff. Wir führen implizite Steuersätze ein und zeigen, wann (beschränkte und unbeschränkte) Arbitragemöglichkeiten in Abhängigkeit dieser impliziten Steuersätze existieren. Im letzten Abschnitt fassen wir die Ergebnisse zusammen.

2. Grundbegriffe einer nichtlinearen Steuer

2.1. Grenz- und Durchschnittssteuersatz

Grundsätzlich gilt es, bei der Analyse von Steuersystemen die Begriffe *Steuerschuld*, *Bemessungsgrundlage* sowie *Steuertarif* klar zu definieren. Zu diesem Zweck sei x die

[5] Vgl. hierzu Exercise 5.D.1 in Mas-Colell, Whinston und Green (1995, S. 143-144).

Bemessungsgrundlage einer Steuer. Dann möge die Steuerschuld durch eine Funktion $T(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ charakterisiert sein. Die Steuerfunktion ist auch für negative Bemessungsgrundlagen definiert, da auch Verluste der Besteuerung unterliegen sollen. Wir wollen zuerst eine Reihe von zweckmäßigen Annahmen an diese Steuerfunktion festhalten.

Wir werden unterstellen, dass die Steuerfunktion stetig ist.[6] Man muss sich klarmachen, dass die Existenz einer Freigrenze bereits durch diese Annahme ausgeschlossen ist. Eine Freigrenze ist dadurch charakterisiert, dass eine Steuerzahlung erst ab einem Einkommen von F erfolgt, dann aber das gesamte Einkommen und nicht nur der F übersteigende Betrag besteuert wird.[7]

Wir werden im Folgenden immer voraussetzen, dass ohne Einkommen keine Steuern zu zahlen sind, oder

$$T(0) = 0. \tag{1}$$

Eine solche Annahme ist deshalb zweckmäßig, weil sinnvollerweise immer $T(x) \leq x$ gilt und im Fall $T(0) < 0$ bereits reines Nichtstun eine Arbitragegelegenheit bedeuten würde. Will man den Zusammenhang von Steuern und Arbitragegelegenheiten untersuchen, müssen solche offensichtlichen Arbitragemöglichkeiten ausgeschlossen werden.[8]

Folgende Definition eines Steuertarifs ist zweckmäßig.

Definition 1 (Durchschnittssteuersatz)**.** *Ein Durchschnittssteuersatz (auch Steuertarif) ist jede Funktion $t(\cdot)\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, für die*

$$T(x) = t(x) \cdot x \tag{2}$$

gilt. Es gilt $t(x) \in [0, 1)$.

Für $x = 0$ ist der Tarif nicht definiert.

Der Grenzsteuersatz gibt die marginale Zusatzbesteuerung im Verhältnis zu einer marginalen Einkommenserhöhung an. Wir können dabei nicht ohne Weiteres voraussetzen,

[6] Streng genommen wird diese Annahme durch eine später von uns getroffene Voraussetzung entbehrlich: Eine konvexe Steuerschuld $T(\cdot)$, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, muss stetig sein.

[7] Eine Steuer mit Freigrenze lautet damit

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \leq F \\ \tau\, x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist in $x = F$ nicht stetig und der Tarif ist auch nicht konvex. Diese Steuer weist im Übrigen die Besonderheit auf, dass für jede andere Bemessungsgrundlage Grenz- und Durchschnittssteuersatz übereinstimmen.

[8] Gilt $T(0) < 0$, so spricht man von einer negativen Einkommensteuer, die zum Beispiel Friedman (1963) diskutiert.

dass die Steuerfunktion T überall differenzierbar ist – wenn etwa der Steuersatz springt oder ein Freibetrag vorliegt, ist Differenzierbarkeit nicht gegeben. Daher schränken wir die Definition auf diejenigen Bemessungsgrundlagen ein, in der der Grenzwert existiert.

Definition 2 (Grenzsteuersatz)**.** *Der Grenzsteuersatz* $T'(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *für eine Bemessungsgrundlage* x_0 *ist gegeben durch*

$$T'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{T(x) - T(x_0)}{x - x_0},$$

wenn dieser Grenzwert eindeutig existiert.

Wir werden eine Steuerfunktion *differenzierbar* nennen, wenn der Grenzsteuersatz für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert. Diese Voraussetzung ist für eine Vielzahl wirtschaftlich relevanter Steuerfunktionen nicht gegeben.

Wir hatten in Definition 1 vorausgesetzt, dass der Durchschnittssteuersatz nichtnegativ und kleiner als 100% ist. Das gilt üblicherweise auch für den Grenzsteuersatz. Allerdings gibt es durchaus Anwendungsfälle im nationalen Steuerrecht, für die dieser Zusammenhang nicht erfüllt ist.[9]

2.2. Konvexe Steuerschuldfunktion

Wir werden uns in dieser Arbeit auf *konvexe* Steuerschuldfunktionen konzentrieren. Das setzt voraus, dass wir die Konvexität definieren und von nun an für die Steuerschuldfunktion auch unterstellen werden.

Definition 3 (Konvexe Steuerfunktion)**.** *Die Steuerschuldfunktion* $T(\cdot)$ *ist konvex, falls für* $0 \leq \lambda \leq 1$ *und* $x, y \in \mathbb{R}$

$$T(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y) \tag{3}$$

erfüllt ist.

Für stetige Steuerfunktionen kann die Konvexität logisch äquivalent durch die etwas schwächere Forderung

$$T(x) + T(y) - 2T\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \geq 0$$

[9]Die OECD hat in ihrem Bericht OECD („OECD-Beschäftigungsausblick 2006“, S. 65) Fälle zusammen getragen, bei denen nach einer Einkommenssteigerung ein effektiver Steuersatz (inklusive weiteren Transferleistungen) von über 100% anfällt. Das ist beispielsweise in Deutschland (2015) der Fall für Alleinerziehende oder verheiratete Alleinverdienerhaushalte mit 2 Kindern, deren Verdienst von 50% auf 55% des Durchschnittseinkommens ansteigt. Weitere Beispiele für so genannte Tarifverwerwerfungen finden sich zum Beispiel in Hechtner (2015) im Fall der Besteuerung von außerordentlichen Einkünften (Fünftelregelung §34 EStG).

beschrieben werden.[10] Diese Eigenschaft einer Steuerfunktion hat eine sehr intuitive Interpretation. Zu diesem Zweck orientieren wir uns am deutschen Recht und betrachten das so genannte Ehegattensplitting (§32a Abs. 5 EStG). Nach dem Ehegattensplitting können statt der tatsächlichen Einkünfte eines Ehepaares die Durchschnittswerte bestimmt und dann besteuert werden. Wegen der Progression der Einkommensteuer erzielt das Ehepaar so eine Steuerersparnis. Die eben genannte Ungleichung bestimmt genau die Höhe dieser Steuerersparnis. Demzufolge sind beim deutschen Recht Konvexität der Steuerfunktion und Vorteil durch Ehegattensplitting ein und dasselbe.

Sehr viele Steuersysteme weisen die Eigenschaft auf, dass der Durchschnittssteuersatz $t(x)$ monoton wachsend in der Bemessungsgrundlage x ist. Diese Monotonie ist darauf zurückzuführen, dass der Gesetzgeber höhere Einkommen stärker als niedrigere Einkommen besteuern möchte; man spricht auch vom "Leistungsfähigkeitsprinzip" oder "vertikaler Steuergerechtigkeit" und nennt entsprechende Tarifverläufe progressiv. Man könnte denken, dass Konvexität und Progression logisch äquivalent wären, dies ist jedoch nicht der Fall.

In der Tat folgt aus Konvexität einer Steuer die Progression wegen der *Increasing Slope Eigenschaft*[11], da

$$\frac{T(x) - T(0)}{x - 0} = t(x)$$

auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ monoton wächst. Das nachfolgende Beispiel zeigt aber, dass progressive Steuersysteme existieren, die nicht konvex sind. Hierzu betrachten wir die Funktion $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$T(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \sqrt{2}, \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

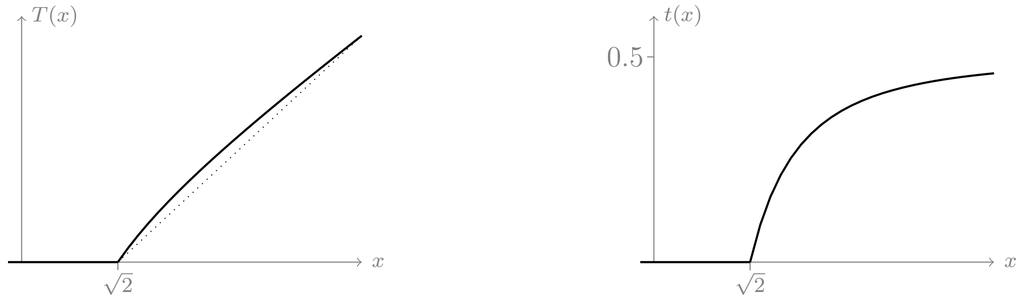
In diesem Fall ist $t(x)$ gegeben durch (der Tarif ist in $x = 0$ nicht definiert)

$$t(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \sqrt{2}, x \neq 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie man in Abbildung (1) deutlich erkennen kann, ist $t(\cdot)$ zwar monoton wachsend, aber die Steuerschuld $T(\cdot)$ ist nicht konvex. Insofern ist eine konvexe Steuerfunktion eine etwas stärkere Forderung als ein progressiver Tarifverlauf.

[10] Dies entspricht der Ungleichung (3) mit $\lambda = \frac{1}{2}$. Dass Konvexität bei stetigen Funktion durch diese Gleichung definiert werden kann, hat bereits der Begründer der Theorie konvexer Funktionen, Johan Ludwig Jensen, nachgewiesen.

[11] Siehe Proposition 6.1 in Hiriart-Urruty und Lemaréchal (2001, S. 15).



(a) Die Steuerfunktion ist nicht konvex (dies illustriert eine eingezeichnete, gestrichelte Sekante).

(b) Der Durchschnittssteuersatz ist monoton wachsend.

Abbildung 1: Beispiel einer progressiven Steuerfunktion, die nicht konvex ist.

2.3. Subdifferential, Subgradient und konjugierte Steuerfunktion

Viele Länder besitzen Steuersysteme, bei denen die Grenzsteuersätze mehrere Werte annehmen können; man spricht auch von einem Stufentarif.[12]

Der einfachste Fall eines solchen Stufentarifs liegt sicher vor, wenn Gewinne anders besteuert werden als Verluste. Eine solche Steuerfunktion kann man durch die Gleichung

$$T(x) = \tau_- \cdot \min(x, 0) + \tau_+ \cdot \max(x, 0) \tag{4}$$

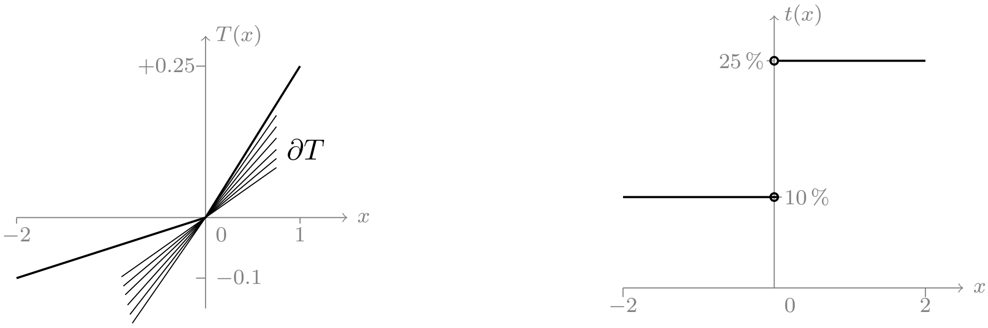
beschreiben. Abbildung 2 zeigt eine Einkommensteuerfunktion vom Typ (4), bei der Verluste mit $\tau_- = 10\,\%$ und Gewinne mit $\tau_+ = 25\,\%$ besteuert werden. Die Steuerfunktion ist konvex und an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar.[13]

Betrachtet man die Abbildung 2a, so gibt es nicht nur eine, sondern mehrere Geraden mit einem Anstieg aus dem Intervall $[\tau_-, \tau_+]$, die man als „Tangente“ an die Steuerfunktion bezeichnen könnte. Abbildung 2a veranschaulicht sechs dieser Anstiege. Man spricht nun nicht mehr von *der* Tangente, sondern untersucht statt dessen *alle möglichen* Anstiege.

Die Menge aller möglichen Anstiege wird *Subdifferential* genannt, die so definierte „erste Ableitung“ ist dann nicht mehr eine Zahl, sondern eine Menge von Zahlen (und bei konvexen Tarifverläufen immer ein Intervall). In der Theorie der konvexen Analysis verwendet man hierfür die Schreibweise $\partial T(\cdot)$. Das Subdifferential ist also die Menge derjenigen Anstiege, die tangential an einen Punkt gezeichnet werden können. Sollte

[12] In der Literatur werden diese Steuersysteme vereinzelt fälschlicherweise auch als linear bezeichnet.

[13] Da die Knickstelle im Ursprung liegt, fallen bei dieser Funktion bis auf die Bemessungsgrundlage $x = 0$ der Durchschnitts- und der Grenzsteuersatz zusammen.



(a) Verluste werden anders besteuert als Gewinne.

(b) Grenzsteuersatz und Durchschnittssteuersatz sind identisch.

Abbildung 2: Beispiel einer stückweise linearen Einkommensteuerfunktion mit $\tau_- = 10\,\%$ und $\tau_+ = 25\,\%$.

$T(\cdot)$ sogar differenzierbar an der Stelle x sein, so fallen Subdifferential und Tangente zusammen; es gilt dann also $\partial T(x) = \{T'(x)\}$. Wir entlehnen die formale Definition eines Subdifferential der konvexen Analysis.[14]

Definition 4 (Subdifferential und Subgradient)**.** *Das Subdifferential einer konvexen Steuerfunktion $T(\cdot)$ an der Stelle x ist gegeben durch die folgende Menge reeller Zahlen*

$$\partial T(x) := \{g \in \mathbb{R} \mid \forall y \quad T(y) \geq T(x) + g(y - x)\}. \tag{5}$$

Ein Element $g \in \partial T(x)$ bezeichnet man auch als Subgradienten von $T(\cdot)$ an der Stelle x.

Zuletzt benötigen wir für unsere weiteren Überlegungen den Begriff der konjugierten Steuerfunktion. Insbesondere wird der Definitionsbereich, für den diese konjugierte Funktion definiert ist, wichtig werden.

Definition 5 (konjugierte Steuerfunktion)**.** *Die konjugierte Steuerfunktion $T^*(\cdot)$ zur Steuerschuldfunktion $T(\cdot)$ ist gegeben durch*

$$T^*(\tau) := \sup_{x \in \mathbb{R}} \tau x - T(x).$$

Der Definitionsbereich, auf dem diese konjugierte Funktion endlich ist, bezeichnen wir mit $\mathrm{dom}(T^*) = \{\tau \mid T^*(\tau) < \infty\}$.

[14]Siehe zum Beispiel Hiriart-Urruty und Lemaréchal (2001, S. 165) sowie Rockafellar (1997, S. 214-215). Dort wird auch gezeigt, dass für konvexe Funktionen das Subdifferential immer existiert und (wenn die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist) für jedes x ein abgeschlossenes Intervall darstellt.

Die konjugierte Steuerfunktion ist auf ihrem Definitionsbereich stets konvex.[15] Für die weiteren Überlegungen benötigen wir ein wichtiges Ergebnis der Theorie konjugierter Funktionen. Es gilt

Lemma 6. *Es gilt* $\partial T(x) \subset \mathrm{dom}(T^*)$ *für alle* x.

Beweis. In Hiriart-Urruty und Lemaréchal (2001, Theorem 1.4.1, S. 220) wird bewiesen, dass $\tau \in \partial T(x)$ gleichbedeutend ist mit

$$T^*(\tau) + T(x) - \tau \cdot x = 0.$$

Damit muss für diese Steuersätze $T^*(\tau)$ endlich sein, und es gilt $\tau \in \mathrm{dom}(T^*)$. □

3. Theorie arbitragefreier Bewertung mit konvexen Steuern

3.1. Das Modell

Es gebe in unserem Modell mehrere Zeitpunkte $t = 0, 1 \dots, T$. In den Zeitpunkten $t = 1, \dots, T$ des Modells erhalten die Inhaber der Wertpapiere Cashflows, in den Zeitpunkten $t = 0, \dots, T-1$ kann man diese Wertpapiere am Kapitalmarkt handeln. Die Theorie arbitragefreier Bewertung zeichnet sich durch eine relative Bewertung aus: Der Preis eines Wertpapiers oder einer Handelsstrategie wird ermittelt, indem der Preis für ein anderes Wertpapier oder eine Handelsstrategie mit identischen Cashflows bestimmt wird und beide Preise nicht voneinander abweichen dürfen. Dies unterscheidet die Theorie arbitragefreier Bewertung von der Gleichgewichtstheorie, bei der Preise auf Nutzenfunktionen und Erstausstattungen zurückgeführt werden können.

Damit muss man bei der Theorie arbitragefreier Bewertung die Preise gewisser Assets bereits voraussetzen – das gilt auch für den Fall, dass Steuern unterstellt werden. Die Theorie arbitragefreier Bewertung klärt dann, wie sich die Preise zusätzlicher Wertpapiere errechnen. Wir werden hier annehmen, dass es einen Standard-Kupon-Bond mit Zinszahlungen in Höhe eines risikolosen Zinssatzes $r_f > 0$ gibt. Den Preis nach Steuern, zu dem dieses Papier in jedem Zeitpunkt ge- und verkauft werden kann, werden wir bei eins normieren. Jetzt ist eine Fülle von Symbolen einzuführen.

Die Cashflows des Standard-Kupon-Bonds sind durch einen Vektor $x^0 = (r_f, \dots, r_f, 1 + r_f) \in \mathbb{R}^T$ gegeben. Die Preise, zu denen eine Einheit dieses Standard-Kupons in den Zeitpunkten gehandelt werden kann, bezeichnen wir durch den Vektor $p^0 = (1, \dots, 1, 0) \in \mathbb{R}^{T+1}$, wobei wir hier aus Gründen der Zweckmäßigkeit einen fiktiven Preis von null

[15] Siehe Rockafellar (1997, S. 104).

im letzten Zeitpunkt (in dem kein Handel mehr stattfindet) hinzufügen. Lässt man dynamische Handelsstrategien zu, so ist mit diesem Kupon-Bond jede beliebige risikolose Auszahlungsstruktur (nach Steuern) duplizierbar. Daher ist es ausreichend, nur diesen Kupon-Bond als Basiswertpapier vorauszusetzen.

Wir führen dann ein weiteres Wertpapier mit beliebiger Zahlungsstruktur ein und untersuchen, welche Eigenschaften die Preise dieses Wertpapiers haben müssen, damit der Markt (nun bestehend aus dem Standard-Kupon-Bond und dem weiteren Wertpapier) arbitragefrei bleibt. Die Cashflows dieses Wertpapiers bezeichnen wir mit dem Vektor $x^1 = (x_1^1, \ldots, x_T^1) \in \mathbb{R}^T$, der Index gibt den Zeitpunkt des Zuflusses an. Die Preise dieses Wertpapiers, zu denen eine Einheit im Zeitpunkt t ge- und verkauft werden kann, erfassen wir in einem Vektor $p^1 = (p_0^1, \ldots, p_{T-1}^1, p_T^1) \in \mathbb{R}^{T+1}$, dabei gibt der Index wieder den Handelszeitpunkt an und sinnvollerweise gilt erneut $p_T^1 = 0$.

Die Inhaber der Wertpapiere haben in den Zeitpunkten $t = 1, \ldots, T$ aus den erhaltenen Cashflows eine Einkommensteuer zu zahlen. Die Steuerschuld errechnet sich aus einer (zeitunabhängigen) konvexen Funktion $T(\cdot)$, die auf eine Bemessungsgrundlage angewandt wird. Es gilt für diese Tariffunktion $T(0) = 0$ und die Durchschnittssteuersätze $t(\cdot)$ liegen im Intervall $[0, 1)$.

Allerdings entspricht diese Bemessungsgrundlage weder unmittelbar dem Cashflow noch dem Preis des Wertpapiers oder der Strategie, die der Investor in dem Zeitpunkt durchführt. In einer Vielzahl von Ländern ist die Einkommensteuer nicht gerade einfach zu berechnen. Vielmehr bildet eine Vielzahl von gesetzlich, klar definierten, Einzelbestimmungen die Bemessungsgrundlage der festzusetzenden Einkommensteuer. Die Summe der Einzelgrundlagen bildet dabei den Kern der (Gesamt-)Bemessungsgrundlage – das so genannte Einkommen. In unserem Modell sind das Zahlungen, die den Anteilseignern zufließen. Es gibt jedoch Zahlungen, die nicht die Eigenschaft von Dividenden aufweisen (z.B. Kapitalrückzahlungen o.ä.). Solche Zahlungen müssen wir von der Bemessungsgrundlage abziehen. Hierzu führen wir eine neue Variable $a^1 := (a_1^1, \ldots, a_T^1)$ ein, die aus der Differenz der Cashflows und der gesetzlichen bestimmten Bemessungsgrundlage des zweiten Wertpapiers besteht. Zum Zeitpunkt t ist das

$$x_t^1 - a_t^1.$$

Im Fall der Standard-Kupon-Anleihe setzen wir $a^0 = (0, \ldots, 0, 1)$, da im letzten Zeitpunkt eine Kapitalrückzahlung in Höhe von eins erfolgte. Die Bemessungsgrundlage der Einkommensteuer wird sich dann aus der Summe der Bemessungsgrundlagen der gehaltenen Mengen an Standard-Kupon-Anleihen sowie Mengen des zweiten Wertpapiers ergeben.

Ein Investor kann am Markt handeln und eine dynamische Handelsstrategie durchführen. Die Menge an Standard-Kupons, die er im Rahmen dieser Strategie hält, bezeichnen wir mit dem Vektor $h = (h_0^0, h_1^0, \ldots, h_{T-1}^0)$. Vereinfachend setzen wir zudem $h_{-1}^0 = h_T^0 = 0$. Analog ist h^1 die Menge des zweiten Wertpapiers. Im Zeitpunkt t kann dann der Investor, wenn er dieser Handelsstrategie folgt, nach Steuern folgenden Betrag für den Konsum entnehmen

$$\begin{aligned}\delta_t(h) = -p_t^1 h_t^1 - p_t^0 h_t^0 + \left(p_t^1 + x_t^1\right) h_{t-1}^1 + \left(p_t^0 + x_t^0\right) h_{t-1}^0 \\ - T\left((x_t^1 - a_t^1)h_{t-1}^1 + (x_t^0 - a_t^0)h_{t-1}^0\right).\end{aligned}$$

Diese Definition unterscheidet sich von der Theorie der arbitragefreien Bewertung ohne Steuern nur durch die Steuerschuld $T(\cdot)$. Wir definieren den Begriff einer Arbitragemöglichkeit.

Definition 7 (Arbitragemöglichkeit)**.** *Eine Strategie h ist eine Arbitragemöglichkeit genau dann, wenn $\delta_t(h) \geq 0$ in jedem Zeitpunkt $t = 0, \ldots, T$ gilt und für mindestens einen Zeitpunkt t eine der Ungleichungen strikt ist. Existieren keine Arbitragemöglichkeiten, so ist der Markt arbitragefrei.*

In der Theorie der arbitragefreien Bewertung ohne Steuern bedeutet die Existenz bereits einer Arbitragemöglichkeit h, dass jedes Vielfache dieser Strategie auch zu einem Vielfachen des Arbitragegewinnes führt. In diesem Sinn sind Arbitragemöglichkeiten in der Bewertungstheorie ohne Steuern unbeschränkt. Existieren jedoch konvexe Steuern, so kann es möglich sein, dass eine Durchführung einer Arbitragestrategie auf höherem Niveau keinesfalls zu einer entsprechenden Erhöhung des Arbitragegewinns führt, sondern dieser vielmehr konstant bleibt. Daher müssen Arbitragemöglichkeiten genauer unterschieden werden. Um dies deutlicher herauszuarbeiten, wollen wir uns auf selbstfinanzierende Strategien beschränken und betrachten das folgende primale Optimierungsproblem (P)

$$\begin{aligned}\inf_h \quad & p_0^1 h_0^1 + p_0^0 h_0^0 \\ \text{s.t.} \quad & \delta_t(h) \geq 0 \quad t = 1, \ldots, T,\end{aligned} \tag{P}$$

wobei p^* den optimalen Wert in (P) bezeichne.

Das primale Problem (P) beschreibt eine selbstfinanzierende Handelsstrategie mit Hilfe der Strategie h, die in der Zukunft höchstens Auszahlungen verspricht, aber keine Einzahlungen erzwingt (wegen $\delta_t(h) \geq 0$ für alle $t > 0$). Wenn keine Arbitragemöglichkeiten existieren, muss diese Handelsstrategie heute einen nichtnegativen Preis aufweisen. Ohne Einschränkung gehen wir davon aus, dass Arbitragegewinne stets mit einer positiven

Einzahlung in $t = 0$ einhergehen (damit gilt $p^* < 0$ im Falle einer Arbitrage).[16] Von daher ist es sinnvoll, den niedrigsten Preis zu betrachten, den eine solche Handelsstrategie heute kostet. Da weiter $h \equiv 0$ zulässig ist, folgt $p^* \leq 0$.

Der einzige Preis, der mit Arbitragefreiheit verträglich ist, ist ein optimaler Wert $p^* = 0$. Stellt sich dagegen heraus, dass eine optimale Strategie mit $p^* < 0$ existiert, so muss es sich wegen des negativen Preises offensichtlich um eine Arbitragemöglichkeit handeln. Die Höhe des Arbitragegewinns selbst wird durch den Optimalwert p^* angegeben. In der Theorie ohne Steuern konnte statt einer Strategie auch deren Vielfaches genutzt werden, so dass Arbitragemöglichkeiten immer $p^* = -\infty$ implizierten. Wir werden hier dagegen einen weiteren Fall zu beachten haben.

Im Fall beschränkter Arbitragemöglichkeiten kann zwar ein Investor durch geschickte Handelsstrategien ohne finanzielle Mittel positive Cashflows generieren. Insofern stellt eine Budgetrestriktion keine wirkliche Restriktion dar, da der Investor sie ja mit dieser Strategie umgehen kann. Aber die Cashflows, die auf diese Weise erzeugt werden können, sind nicht unendlich hoch. Vielmehr ist der maximale Zufluss, den man auf diese Weise erreichen kann, durch den Wert p^* beschränkt. Zusammenfassend erlaubt dies die folgende Definition.

Definition 8 (beschränkte und unbeschränkte Arbitragemöglichkeiten)**.** *Eine Arbitragemöglichkeit (Strategie) h heißt* beschränkt *genau dann, wenn für den optimalen Wert in (P) die Relation $-\infty < p^*$ gilt. Eine Arbitragemöglichkeit heißt* unbeschränkt*, falls $p^* = -\infty$ gilt in (P).*

Beschränkte Arbitragemöglichkeiten sind im Fall linearer Steuern nicht möglich.

3.2. Charakterisierung aller Arbitragemöglichkeiten

Wir kommen nun zum Hauptergebnis unserer Arbeit. Mit Hilfe der konvexen Theorie der dualen Optimierung können wir die Preise, die zu beschränkten oder unbeschränkten Arbitragemöglichkeiten führen, genau charakterisieren.

Zu diesem Zweck führen wir die impliziten Steuersätze τ_t ein. Wir notieren die Preise des zu bewertenden Wertpapiers p_t^1 für jeden Zeitpunkt $t = 0, \ldots, T-1$ in einer Art

[16] Sollten die risikofreien Gewinne etwa in der Zukunft anfallen ($\delta_t(h) > 0$ für ein $t > 0$) und heute einen Preis von null generieren, dann können wir durch den Verkauf einer Kupon-Anleihe zum Zeitpunkt $t-1$ eine selbstfinanzierende Strategie in t generieren, die eine echt positive Entnahme in $t-1$ nach sich zieht. Diese Verschiebung bis zum heutigen Zeitpunkt wiederholen wir in $t-2$ usw., bis wir in $t = 0$ eine echt positive Entnahme erhalten. Dies ist immer möglich, sobald $r_f > 0$ gilt und die Tariffunktion Durchschnittssteuersätze unter 100% aufweist.

und Weise, als ob die Steuern linear auf diese Preise wirken würden. Wären die Steuern linear, dann gäbe es Zahlen τ_t, so dass

$$p^1_{t-1} \stackrel{!}{=} \frac{p^1_t + x^1_t - \tau_t(x^1_t - a^1_t)}{1 + r_f(1 - \tau_t)}$$

gilt. Diese Gleichung kann man im Fall $p^1_{t-1} \neq \frac{x^1_t - a^1_t}{r_f}$ nach den Steuersätzen umstellen

$$\tau_t = \frac{(1 + r_f)p^1_{t-1} - p^1_t - x^1_t}{r_f p^1_{t-1} - (x^1_t - a^1_t)}. \tag{6}$$

Dies gibt Anlass zu folgender Definition.

Definition 9 (implizite Steuersätze)**.** *Die Zahlen τ_t, die die Gleichung (6) erfüllen, nennen wir implizite Steuersätze zu den Preisen p^1_t im Zeitpunkt t. Ist der Nenner in (6) null, so setzen wir $\tau_t := +\infty$.*

Betrachten wir einen impliziten Steuersatz τ_t. Für diesen Steuersatz werden wir nun in Abhängigkeit vom tatsächlichen Tarifverlauf drei einander ausschließende Möglichkeiten beschreiben. Die drei Möglichkeiten orientieren sich daran, in welcher der beiden Mengen $\partial T(0)$ sowie $\operatorname{dom}(T^*)$ der implizite Steuersatz zu finden ist. Dabei ist zu beachten, dass wegen Lemma 6 für den Subgradienten $\partial T(0) \subset \operatorname{dom}(T^*)$ gilt.

Der nachfolgende Satz beschreibt vollständig, welche Arbitragemöglichkeiten an einem Kapitalmarkt bei Einbezug einer konvexen Einkommensteuer zu finden sind. Den Beweis des Satzes haben wir in den Anhang ausgelagert.

Satz 10. *Seien τ_t die impliziten Steuersätze zu gegebenen Marktpreisen p_t in den Zeitpunkten $t = 0, \ldots, T-1$. Dann gilt genau einer der drei nachfolgenden Fälle:*

1. *Die Marktpreise sind arbitragefrei genau dann, wenn $\tau_t \in \partial T(0)$ für alle t erfüllt ist.*[17]

2. *Es gibt unbeschränkte Arbitragemöglichkeiten genau dann, wenn für mindestens einen impliziten Steuersatz $\tau_t \notin \operatorname{dom}(T^*)$ gilt.*

3. *In allen anderen Fällen gibt es beschränkte Arbitragemöglichkeiten.*

   Dies ist genau dann der Fall, wenn $\tau_t \in \operatorname{dom}(T^*)$ für alle t und für mindestens ein t' die Bedingung $\tau_{t'} \in \operatorname{dom}(T^*) \setminus \partial T(0)$ gilt.

[17] $\partial T(0)$ kann eine einzelne Zahl sein, falls die Steuerschuldfunktion an der Stelle 0 differenzierbar ist. Anderenfalls handelt es sich um ein Intervall aus links- und rechtsseitiger Ableitung, da $\partial T(0)$ immer konvex und abgeschlossen ist, siehe Rockafellar (1997, S. 217ff.).

Besonders übersichtlich werden die Ergebnisse, wenn wir eine weitere Annahme an die Steuerfunktionen unterstellen. Um unsere Annahme zu motivieren, betrachten wir das Beispiel der Steuerfunktion

$$T(x) = \begin{cases} x + 1 - \sqrt{x+1} & x \geq 0, \\ \frac{x}{2} & x < 0. \end{cases}$$

Diese Steuerfunktion besitzt für positive Bemessungsgrundlagen den Grenzsteuersatz $1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, der sich monoton dem Wert von 100% nähert, ihn für eine endliche Bemessungsgrundlage aber nie erreicht. Für die nationalen Steuersysteme ist ein solches Grenzverhalten aber völlig untypisch. Vielmehr haben alle nationalen Einkommensteuersysteme, die uns bekannt sind, die Eigenschaft, an den Rändern affin-linear zu sein. Dies setzen wir von nun an voraus:

Definition 11. *Eine Steuerfunktion $T(\cdot)$ ist* an den Rändern affin-linear *genau dann, wenn es eine hinreichend große Bemessungsgrundlage $x_0 \gg 0$ sowie zwei Zahlen T, T' gibt, so dass für alle $x > x_0$ gilt*

$$T(x) = T + \tau_{max} \cdot x$$

sowie für alle $x < -x_0$ die Relation

$$T(x) = T' + \tau_{min} \cdot x$$

mit Zahlen $0 \leq \tau_{min} \leq \tau_{max} < 1$ gilt. Diese Zahlen nennen wir maximale und minimale Grenzsteuersätze.

In diesem Fall lässt sich der Definitionsbereich der konjugierten Steuerfunktion sehr einfach beschreiben.[18] Da wir auch wissen, dass $\partial T(0)$ konvex und abgeschlossen sein muss, handelt es sich um ein Intervall. Die Grenzsteuersätze, die dieses Intervall bilden, schreiben wir einfacher als $\partial T(0) = [\tau_{0-}, \tau_{0+}]$; bei Steuerschuldfunktionen, die in $x = 0$ differenzierbar sind, degeneriert das Intervall zu einem Punkt. Nun gilt folgender Satz.

Korollar 12. *Seien τ_t die impliziten Steuersätze zu gegebenen Preisen p_t eines Wertpapiers, die Steuerschuldfunktion sei affin-linear an den Rändern. Es gelten die folgenden drei Aussagen.*

1. *Der Markt ist arbitragefrei genau dann, wenn $\tau_{0-} \leq \tau_t \leq \tau_{0+}$ für alle t erfüllt ist.*

[18] Wir danken Tyrrell Rockafellar an dieser Stelle für den Hinweis und insbesondere für die Erläuterung, warum die Annahme affin-linearer Ränder auch notwendig ist.

2. *Es gibt beschränkte Arbitragemöglichkeiten genau dann, wenn* $\tau_{min} \leq \tau_t \leq \tau_{max}$ *für alle* t *und für mindestens ein* t' *die Bedingung* $\tau_{t'} < \tau_{0-}$ *oder* $\tau_{0+} < \tau_{t'}$ *gilt.*

3. *Es gibt unbeschränkte Arbitragemöglichkeiten genau dann, wenn für mindestens einen impliziten Steuersatz* $\tau_t < \tau_{min}$ *oder* $\tau_t > \tau_{max}$ *gilt.*

Die Ergebnisse dieses Satzes können sehr leicht graphisch illustriert werden, siehe dazu Abbildung 3.

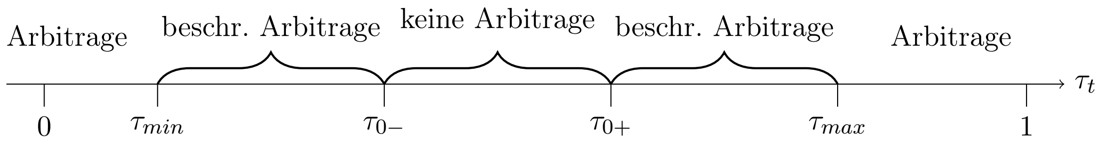


Abbildung 3: Illustration der Aussage des Korollars 12. Es sind die Wertebereiche der impliziten Steuersätze angegeben, die auf die jeweiligen Arbitragemöglichkeiten führen.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass bei Steuerfunktion mit affin-linearen Rändern die Aussage $\mathrm{dom}(T^*) = [\tau_{min}, \tau_{max}]$ korrekt ist. Dazu beweisen wir zuerst die Relation

$$\mathrm{dom}(T^*) \subset [\tau_{min}, \tau_{max}]. \tag{7}$$

Zuerst gilt die so genannte Fenchel-Ungleichung

$$T^*(\tau) := \sup_x \tau x - T(x) \quad \Longrightarrow \quad \forall x \; T^*(\tau) \geq \tau x - T(x)$$

. Angenommen, es wäre für $\tau > \tau_{max}$ der Funktionswert $T^*(\tau)$ endlich, also $\tau \in \mathrm{dom}(T^*)$. Dann folgt aus der Fenchel-Ungleichung für große x, weil die Steuerfunktion an den Rändern affin-linear ist,

$$T^*(\tau) \geq (\tau - \tau_{max}) \cdot x - T.$$

Da diese Ungleichung für alle hinreichend große x gilt und zudem $\tau - \tau_{max} > 0$ ist, folgt aber im Widerspruch zur Voraussetzung $T^*(\tau) = +\infty$. Damit gehört (τ_{max}, ∞) nicht zu $\mathrm{dom}(T^*)$.

Analog beweist man, dass für $\tau < \tau_{min}$ der Funktionswert $T^*(\tau)$ nicht endlich sein kann. Somit folgt (7).

Andererseits folgt aus Lemma 6

$$\bigcup_x \partial T(x) \subset \mathrm{dom}(T^*)$$

und wegen Rockafellar (1997, Theorem 24.1, S. 227) sowie der Differenzierbarkeit an den Rändern

$$[\tau_{min}, \tau_{max}] = \bigcup_x \partial T(x).$$

Mit Ungleichung (7) ergibt das

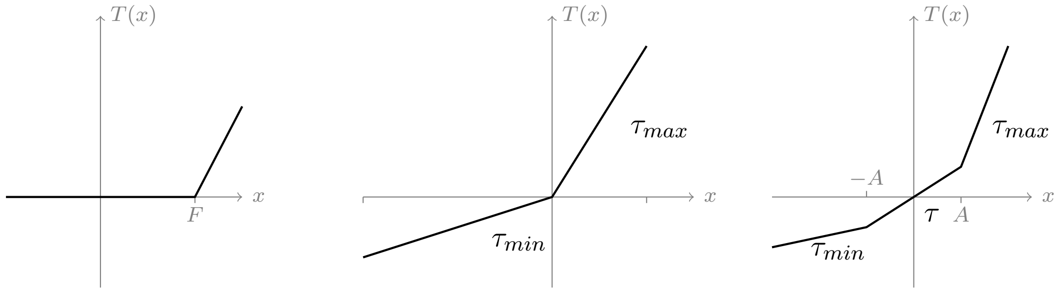
$$[\tau_{min}, \tau_{max}] \subset \mathrm{dom}(T^*) \subset [\tau_{min}, \tau_{max}].$$

und somit $\mathrm{dom}(T^*) = [\tau_{min}, \tau_{max}]$.

Die Aussage des Korollars folgt nun unmittelbar aus Satz 10. □

3.3. Drei erläuternde Beispiele

Wir wollen drei Steuerschuldfunktionen genauer untersuchen und haben sie in der Abbildung 4 dargestellt.



(a) Steuer mit positivem Freibetrag.

(b) Gewinne anders besteuert als Verluste.

(c) Drei Steuerklassen.

Abbildung 4: Drei Beispiele für Steuerschuldfunktionen, bei denen eine vollständige Charakterisierung der Arbitragefreiheit möglich ist.

Steuer mit Freibetrag Wir betrachten zuerst das Beispiel einer Steuer mit Freibetrag (siehe Abbildung 4a). Dazu sei folgende Steuerschuldfunktion gegeben

$$T(x) = \tau \max(x - F, 0), \qquad \tau \in [0, 1).$$

Die Steuer wird erhoben, wenn das Einkommen den Freibetrag $F > 0$ übersteigt, andernfalls beträgt die Steuer null. In diesem Beispiel gilt (ausgehend von den Bezeichnungen des Korollars 12)

$$\tau_{0-} = \tau_{0+} = 0, \quad \tau_{min} = 0, \quad \tau_{max} = \tau.$$

In diesem Fall ist $\partial T(0) = \{T'(0)\} = \{0\}$. Nach Korollar 12 garantieren dann nur Preise mit einem impliziten Steuersatz von null vollständige Arbitragefreiheit – was gleichbedeutend damit ist, dass Steuern in den Preisgleichungen vollständig ignoriert werden. Diese Aussage gilt übrigens auch dann, wenn die Steuer jenseits des Freibetrages F nicht mehr linear, sondern (wie etwa im deutschen Recht) quadratisch verläuft.

Beschränkte Arbitragemöglichkeiten existieren, wenn in den Preisen implizite Steuersätze aus dem Intervall $(0, \tau]$ auftauchen. In allen anderen Fällen liegen unbeschränkte Arbitragemöglichkeiten vor.

Unterschiedliche Gewinn- und Verlustbesteuerung Das zweites Beispiel, an dem wir diesen Satz illustrieren wollen, ist eine Steuer, die Gewinne und Verluste unterschiedlich besteuert (siehe Abbildung 4b). Diese Art der Steuer hatten wir bereits in Gleichung (4) dargestellt, um die Definition des Subdifferentials zu motivieren. Analog zum vorigen Beispiel erhalten wir hier

$$\tau_{0-} = \tau_{min}, \quad \tau_{0+} = \tau_{max}.$$

Gar keine Arbitragemöglichkeiten treten hier auf, wenn die impliziten Steuersätze aus dem Intervall $[\tau_{min}, \tau_{max}]$ stammen. Sind die impliziten Steuersätze nicht aus diesem Intervall, gibt es unbeschränkte Arbitragemöglichkeiten. Eine beschränkte Arbitragemöglichkeit ist mit diesem Steuersystem in keinem Fall möglich.

Drei Steuerklassen Das dritte Beispiel möge ein Stufentarif sein, der drei mögliche Werte annehmen kann ($\tau_{min} < \tau < \tau_{max}$, siehe Abbildung 4c):

$$T(x) = \begin{cases} \tau_{min} \cdot x + (\tau_{min} - \tau) \cdot A & \text{wenn } x < -A \\ \tau \cdot x & \text{wenn } -A \leq x \leq A \\ \tau_{max} \cdot x + (\tau - \tau_{max}) \cdot A & \text{wenn } A < x. \end{cases}$$

In diesem Fall gilt nun

$$\tau_{0-} = \tau_{0+} = \tau$$

und somit haben wir folgende Situation. Nur wenn die implizite Steuersätze $\tau_t = \tau$ betragen, ist der Markt vollständig arbitragfrei. Für implizite Steuersätze $\tau_t \in [\tau_{min}, \tau_{max}] \setminus \{\tau\}$ gibt es beschränkte Arbitragemöglichkeiten. Für alle anderen Werte existieren unbeschränkte Arbitragemöglichkeiten.

3.4. Intuition der Resultate

Die Ergebnisse unserer Arbeit leuchten zweifellos nicht ohne Weiteres ein. Ökonomen sind aber auch an intuitiv überzeugenden Erläuterungen formaler Forschungsergebnisse interessiert. Daher wollen wir in diesem Abschnitt den Versuch unternehmen, eine Analogie zur Produktionstheorie herzustellen. Wir zeigen, dass sich steuerlich optimale Portfolios durch implizite Steuersätze auszeichnen, bei denen Grenz- und Durchschnittssteuersatz übereinstimmen. Anderenfalls kann der Investor durch Umschichtungen die Steuerzahlungen weiter senken.

Konvexe Funktionen haben die bekannte Eigenschaft, dass sie höchstens auf einer abzählbar unendlichen Menge nicht differenzierbar sind.[19] Wir werden für unseren nächsten Satz annehmen müssen, dass die Nichtdifferenzierbarkeit sogar an *endlich* vielen Stellen gilt.

Wieder schreiben wir $\partial T(0) = [\tau_{0-}, \tau_{0+}]$, zudem seien die minimalen und maximalen Grenzsteuersätze mit τ_{min} und τ_{max} bezeichnet. Des weiteren sei x_0 die größte Bemessungsgrundlage, für die immer noch $\tau_{0+} \in \partial T(x_0)$ gilt. Es gibt immer eine solche Bemessungsgrundlage, da nach Definition von τ_{0+} immer $\tau_{0+} \in \partial T(0)$ gilt. Der Einfachheit halber konzentrieren wir uns auf nichtnegative Bemessungsgrundlagen, der nachfolgende Satz gilt sinngemäß auch für nichtpositive Bemessungsgrundlagen.

Satz 13. *Die Steuerschuldfunktion sei konvex, affin-linear an den Rändern und nur an endlich vielen Stellen nicht differenzierbar. Dann weist die Steuerschuldfunktion die folgenden Eigenschaften auf:*

1. *Wenn $x_0 > 0$ gilt, dann ist die Steuerschuldfunktion auf dem Intervall $[0, x_0]$ linear.*
2. *Auf dem Intervall (x_0, ∞) liegt der Grenzsteuersatz über dem Durchschnittssteuersatz, also $\partial T(x) > t(x)$. Der Grenzsteuersatz ist zudem aus dem Intervall $(\tau_{0+}, \tau_{max}]$.*
3. *Für $x \to \infty$ nähern sich Grenz- und Durchschnittssteuersatz wieder an, also $\lim_{x\to\infty} \partial T(x) - t(x) = 0$.*

Die erste Eigenschaft definiert gleichzeitig diejenigen impliziten Steuersätze, bei denen die Preise arbitragefrei sind. Diejenigen impliziten Steuersätze sorgen für Arbitragefreiheit, bei denen in der Steuerschuldfunktion Grenz- und Durchschnittssteuersätze übereinstimmen.

Die zweite Eigenschaft definiert diejenigen impliziten Steuersätze, bei denen die Preise beschränkte Arbitragemöglichkeiten ermöglichen. Solche beschränkten Arbitragemöglichkeiten können realisiert werden, weil Grenz- und Durchschnittssteuersätze nicht übereinstimmen.

[19] Eine Menge ist abzählbar, wenn sich eineindeutig in die natürlichen Zahlen abbilden lassen. Die Aussage ist beispielsweise in Zajíček (2007) bewiesen.

Unbeschränkte Arbitragemöglichkeiten existieren außerhalb des Intervalls $[\tau_{min}, \tau_{max}]$. Der Verlauf einer Steuerschuldfunktion folgt daher einem Muster, das wir in Abbildung 5 illustriert haben.

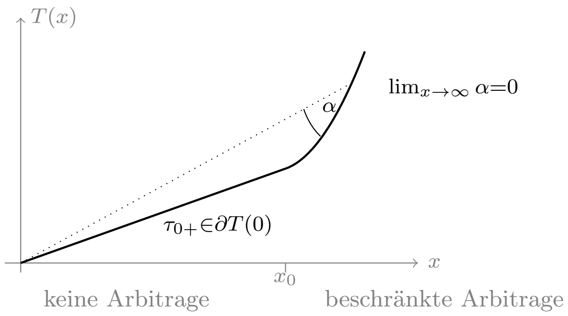


Abbildung 5: Exemplarischer Verlauf einer konvexen Steuerschuldfunktion. Es ist weiter angegeben, bei welchen Bemessungsgrundlagen sich diejenigen impliziten Steuersätze einstellen, die die jeweiligen Arbitragemöglichkeiten ergeben.

Beweis. Wir beginnen mit der ersten Behauptung. Es gilt $x_0 > 0$ sowie die beiden Relationen

$$\partial T(0) = [\tau_{0-}, \tau_{0+}], \quad \tau_{0+} \in \partial T(x_0).$$

Wir wählen einen Punkt $x \in (0, x_0)$. Dann gilt wegen der Monotonie des Subgradienten (siehe Hiriart-Urruty und Lemaréchal (2001, Satz 6.1.1, S. 199)) für jedes $\tau \in \partial T(x)$

$$(\tau_{0+} - \tau) \cdot (x_0 - x) \geq 0, \qquad (\tau - \tau_{0+}) \cdot (x - 0) \geq 0,$$

woraus $\tau = \tau_{0+}$ folgt. Damit muss gelten $\partial T(x) = \{\tau_{0+}\}$ und $T(\cdot)$ ist auf dem Intervall $(0, x_0)$ differenzierbar und linear mit dem Steuersatz τ_{0+}.

Nun zeigen wir die zweite Behauptung[20]

$$\partial T(x) \geq t(x),$$

wobei die Ungleichung für jeden Subgradienten gilt. Sei dazu $g \in \partial T(x)$. Aus Eigenschaft (5) folgt für x und $y = 0$

$$T(0) \geq T(x) + g \cdot (0 - x) \iff g \cdot x - T(x) \geq 0.$$

Daraus folgt unmittelbar die Aussage.

[20] Die zweite Behauptung gilt sinngemäß auch für negative Bemessungsgrundlagen; in diesem Fall gilt $\partial T(x) \leq t(x)$.

Die dritte Bemerkung

$$\lim_{x\to\pm\infty} T'(x) - t(x) = 0$$

zeigen wir wie folgt. Dazu beweisen wir zuerst, dass die Steuerschuld gegen Unendlich geht, wenn es eine Bemessungsgrundlage x gibt so dass ein Subgradient $g \in \partial T(x)$ positiv ist. Angenommen, die Steuerzahlungen wären für jede Bemessungsgrundlage y beschränkt, $T(y) \leq M$. Da nach Voraussetzung für ein x der Subgradient $0 < g \in \partial T(x)$ erfüllt, folgt für alle $y > \frac{M-T(x)}{g} + x$ nach Definition des Subgradienten

$$T(y) \geq T(x) + g(y - x) > M,$$

im Widerspruch zur angenommenen Beschränktheit.

Da die Anzahl der Nicht-Differenzierbarkeitsstellen endlich ist und $T(x)$ eine monoton wachsende Funktion ist, können wir für sehr große x von der Differenzierbarkeit von $T(\cdot)$ ausgehen und erhalten unter Anwendung von de l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty} t(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{T(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} T'(x) = \tau_{max}.$$

Der Grenzwert existiert auch tatsächlich, da aufgrund der Konvexität der Durchschnittssteuersatz $t(\cdot)$ monoton steigt und nach oben zu 100% beschränkt war. $\square$

4. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir Arbitragegelegenheiten in einem Kapitalmarktmodell unter Sicherheit mit mehreren Handelszeitpunkten und konvexen Steuerschuldfunktionen. Hierzu leiten wir aus den gegebenen Marktpreisen risikoloser Titel periodenspezifische implizite Steuersätze ab. Diese impliziten Steuersätze werden mit den Grenzsteuersätzen der Steuerschuldfunktion $T(\cdot)$ verglichen. Wenn alle impliziten Steuersätze den Grenzsteuersätzen entsprechen, die sich bei der Bemessungsgrundlage null einstellen, dann existieren keine Arbitragegelegenheiten. Diese Bedingung ist sowohl notwendig als auch hinreichend für Arbitragefreiheit.

Weiter sind wir in der Lage, die möglichen Arbitragegelegenheiten genau zu charakterisieren. Es gibt am Markt unbeschränkte Arbitragegelegenheiten genau dann, wenn mindestens ein impliziter Steuersatz einen Wert annimmt, der in der Steuerschuldfunktion als ein möglicher Grenzsteuersatz (für eine beliebige Bemessungsgrundlage) nie auftaucht. In allen anderen Fällen gibt es begrenzte Arbitragemöglichkeiten.

Unsere Ergebnisse weisen eine starke Analogie zu der Produktionstheorie auf, in der Grenz- und Durchschnittskosten im Optimum übereinstimmen. Sind in unserem Modell

Grenz- und Durchschnittssteuern identisch, so liegen am Markt keine Arbitragegelegenheiten vor. Diese Analogie plausibilisiert unsere Ergebnisse.

In einer weiteren Studie werden wir entsprechende Aussagen auf ein Modell unter Unsicherheit erweitern.

Literatur

Ballwieser, Wolfgang u.a. (2007): „Einkommensteuer und Unternehmensbewertung: Probleme mit der Steuerreform 2008“. *Die Wirtschaftsprüfung* (60), 765–769.

Bradford, David F. (2000): *Taxation, wealth, and saving.* MIT Press, Cambridge, Mass.

Brennan, Michael J. (1970): „Taxes, Market Valuation and Corporate Financial Policy“. *National tax journal* (23).4, 417–427.

Dammon, Robert M. und Richard C. Green (1987): „Tax Arbitrage and the Existence of Equilibrium Prices for Financial Assets“. *The Journal of Finance* (42).5, 1143–1166.

Dermody, Jaime Cuevas und R. Tyrrell Rockafellar (1991): „Cash Stream Valuation In the Face of Transaction Costs and Taxes“. *Mathematical Finance* (1).1, 31–54.

Dybvig, Philip und Stephen A. Ross (1986): „Tax Clienteles and Asset Pricing“. *The Journal of Finance* (41), 751–62.

Friedman, Milton (1963): *Capitalism and freedom.* Bd. 111. University of Chicago Press, Chicago.

Gallmeyer, Michael und Sanjay Srivastava (2011): „Arbitrage and the Tax Code“. *Mathematics and Financial Economics* (4), 183–221.

Hechtner, Frank (2015): *Tarifverwerfungen beim Zusammentreffen von Progressionsvorbehalt und Besteuerung außerordentlicher Einkünfte: Theoretische und empirische Befunde zu arbiträren Grenzsteuersatzverläufen.* Bd. 2015,34. Diskussionsbeiträge des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaft der Freien Universität Berlin. Freie Universität Berlin, Fachbereich Wirtschaftswissenschaft, Berlin.

Heintzen, Markus u.a. (2008): „Die typisierende Berücksichtigung der persönlichen Steuerbelastung des Anteilseigners beim squeeze-out“. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* (78), 275–287.

Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste und Claude Lemaréchal (2001): *Fundamentals of convex analysis.* Grundlehren Text editions. Springer, Berlin.

Mas-Colell, Andreu u.a. (1995): *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, New York.

Modigliani, Franco und Merton H. Miller (1963): „Corporate income taxes and the cost of capital: a correction“. *American Economic Review* (53), 433–443.

OECD: „OECD-Beschäftigungsausblick 2006“.

Prisman, Eliezer Z. (1986): „Valuation of Risky Assets in Arbitrage Free Economies with Frictions“. *Journal of Finance* (41).3, 545–557.

Rockafellar, Ralph Tyrrell (1997): *Convex analysis.* 10. print and 1. paperback print. Princeton landmarks an mathematics and physics. Princeton Univ. Press, Princeton und N. J.

Ross, Stephen A. (1987): „Arbitrage and martingales with taxation“. *Journal of Political Economy* (95), 371–393.

Schaefer, Stephen M. (1982): „Taxes and security market equilibrium“. In: *Financial Economics:* Essays in Honor of Paul Cootner. Hrsg. von William F. Sharpe und Cathryn M. Cootner. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (NJ), 159–178.

Siepe, Günter (1997): „Die Berücksichtigung von Ertragsteuern bei der Unternehmensbewertung“. *Die Wirtschaftsprüfung* (50), 1–10 und 37–44.

– (1998): „Kapitalisierungszinssatz und Unternehmensbewertung“. *Die Wirtschaftsprüfung* (51), 325–338.

Zajíček, Luděk (2007): „On sets of non-differentiabilty of Lipschitz and convex functions“. *Mathematica Bohemica* (132), 75–85.

A. Beweis des Satzes 10

Der Beweis beruht ganz erheblich auf der dualen Theorie konvexer Analysis. Zuvor zeigen wir folgendes Lemma.

Lemma 14. *Folgende drei Aussagen gelten für die konjugierte Funktion:*

(i) $T^*(\tau) \geq 0$ *für alle* $\tau \in \mathbb{R}$.

(ii) $T^*(\tau) = 0$ *genau dann, wenn* $\tau \in \partial T(0)$.

(iii) $0 < T^*(\tau) < \infty$ *genau dann, wenn* $\tau \in \mathrm{dom}(T^*) \setminus \partial T(0)$.

Beweis. (i) Folgt direkt aus der Fenchel-Ungleichung, da

$$T^*(\tau) \geq \tau \cdot 0 - T(0) = 0$$

für alle $\tau \in \mathbb{R}$ gelten muss.

(ii) Weil $\tau \in \partial T(x)$ gleichbedeutend ist mit

$$T^*(\tau) + T(x) - \tau \cdot x = 0$$

(siehe Lemma 14) folgt dies unmittelbar.

(iii) Folgt direkt aus der Definition von $\mathrm{dom}(T^*)$ sowie Eigenschaft (i) und (ii).

□

Wir bilden nun zum ursprünglichen Problem (P) das duale Lagrange-Problem (D), das gegeben ist durch

$$\begin{aligned} &\sup_{\lambda} \inf_{h} \quad L(h, \lambda) \\ &\text{s.t.} \qquad \lambda_t \geq 0 \quad t = 1, \dots, T, \end{aligned} \tag{D}$$

mit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_T)'$ sowie der Lagrangefunktion[21]

$$\begin{aligned} L(h, y, \lambda) :&= (p_0)' h_0 - \sum_{t=1}^{T} \lambda_t \delta_t(h) \\ &= (p_0)' h_0 - \sum_{t}^{\prime} \lambda_t \Big((p_t + x_t)' h_{t-1} - T\left((x_t - a_t)' h_{t-1} \right) - (p_t)' h_t \Big), \end{aligned}$$

[21] Wir bezeichnen transponierte Vektoren immer mit $(\cdot)'$.

wobei sich die Vektornotation bei h_t, p_t und x_t sowie a_t auf die beiden Assets (Standard-Kupon-Bond und den zu bewertenden Titel) bezieht.

Sei d^* der optimale Wert von (D). Das duale Problem (D) ist konkav und es gilt $d^* \leq p^*$ (schwache Dualität). Die Slater-Bedingung gilt, weil wegen der Standard-Kupon-Anleihe ein innerer Punkt in (P) existiert, i.e., wird nur diese Anleihe gehalten, entspricht das einer Strategie $h_t^* = (1, 0)$ und es gilt für jeden Zeitpunkt t

$$\delta_t(h^*) = r_f - T(r_f) > 0.$$

Damit damit haben wir aufgrund der starken Dualität sogar $d^* = p^*$ und beide Optimalitätsprobleme sind äquivalent.

Nun führen wir eine Variablentransformation im dualen Problem durch und setzen

$$y_t := (x_t - a_t)' h_{t-1}.$$

Dann lässt sich (D) umschreiben zu folgendem Maximierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \sup\limits_{(\lambda,\nu)} \inf\limits_{h,y} & \hat{L}(h, y, \lambda, \nu) \\ \text{s.t.} & \lambda_t \geq 0 \quad t = 1, \ldots, T, \end{array}$$

wobei $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_T)'$ die neuen Lagrange-Multiplikatoren sind und die Lagrangefunktion nun lautet

$$\hat{L}(h, y, \lambda, \nu) := (p_0)' h_0 - \sum_{t=1}^{T} \lambda_t \big((p_t + x_t)' h_{t-1} - T(y_t) - (p_t)' h_t \big) + \sum_{t=1}^{T} \nu_t \big((x_t - a_t)' h_{t-1} - y_t \big).$$

Setzen wir $\lambda_0 = 1$ und nutzen $(p_T)' h_T = 0$ für beide Titel aus, so können wir die Summen in diesem Ausdruck anders zusammenfassen und so den Ausdruck verändern zu

$$\hat{L}(h, y, \lambda, \nu) = \sum_{t=1}^{T} \lambda_{t-1} \, (p_{t-1})' h_{t-1} - \sum_{t=1}^{T} \big(\lambda_t (p_t + x_t)' h_{t-1} - \nu_t (x_t - a_t)' h_{t-1} - \sum_{t=1}^{T} \big(\nu_t y_t - \lambda_t T(y_t) \big),$$

was sich einfacher schreibt als

$$\hat{L}(h, y, \lambda, \nu) = \sum_{t=1}^{T} \big(\lambda_{t-1} p_{t-1} - \big(\lambda_t (p_t + x_t) - \nu_t (x_t - a_t) \big) \big)' \, h_{t-1} - \sum_{t=1}^{T} \big(\nu_t y_t - \lambda_t T(y_t) \big).$$

Einige der Infima und Suprema in diesem Optimierungsproblem lassen sich weiter vereinfachen, so dass sich (D) endlich schreibt als

$$\begin{aligned}
&\sup_{(\lambda,\nu)} \quad \sum_{t=1}^{T} \inf_{h_{t-1}} \big(\lambda_{t-1}p_{t-1} - \lambda_t(p_t + x_t) + \nu_t(x_t - a_t)\big)' h_{t-1} - \sum_{t=1}^{T} \sup_{y_t} \big(\nu_t y_t - \lambda_t T(y_t)\big) \\
&\text{s.t. } \lambda_t \geq 0 \quad t = 1, \ldots, T. \qquad \text{(D1)}
\end{aligned}$$

Betrachtet man nur den Infimumterm von der Objektfunktion in (D1,) erhält man

$$\inf_{h_{t-1}} \big(\lambda_{t-1}p_{t-1} - \lambda_t(p_t + x_t) + \nu_t(x_t - a_t)\big)' h_{t-1} = \begin{cases} 0, & \lambda_{t-1}p_{t-1} - \lambda_t(p_t + x_t) + \nu_t(x_t - a_t)\big) \\ -\infty, & sonst. \end{cases}$$

Somit ist (D1) äquivalent zu

$$\begin{aligned}
&\sup_{(\lambda,\nu)} - \sum_{t=1}^{T} \sup_{y_t} \big(\nu_t y_t - \lambda_t T(y_t)\big) \qquad \text{(D2)} \\
&\text{s.t. } \lambda_t \geq 0, \quad \lambda_{t-1}p_{t-1} - \lambda_t(p_t + x_t) + \nu_t(x_t - a_t) = 0 \qquad t = 1, \ldots, T.
\end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt, dass zulässige λ_t in (D2) stets positiv sind. Angenommen es existiere ein Zeitpunkt t' mit $\lambda_{t'} = 0$ in (D2). Dann ist $d^* = -\infty$, sofern nicht auch gleichzeitig $v_{t'} = 0$ in (D2) erfüllt ist. Aufgrund der rekursiven Beziehung in der Nebenbedingung folgt analog für alle anderen Zeitpunkte $t < t'$, dann auch $\lambda_t = \nu_t = 0$ und insbesondere für $t = 1$

$$\lambda_0 p_0 = p_0 = 0$$

im Widerspruch zu der Existenz einer risikofreien Kupon-Anleihe mit $p_0^0 = 1$. Folglich kommen nur positive Lagrange-Faktoren als zulässige Lösungen in (D1) in Frage.

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned}
\sup_{y_t} \big(\nu_t y_t - \lambda_t T(y_t)\big) &= \sup_{y_t} \left(\lambda_t \frac{\nu_t}{\lambda_t} y_t - \lambda_t T(y_t)\right) \\
&= \lambda_t \sup_{y_t} \left(\frac{\nu_t}{\lambda_t} y_t - T(y_t)\right) \\
&= \lambda_t T^* \left(\frac{\nu_t}{\lambda_t}\right).
\end{aligned}$$

Dies können wir in (D2) einsetzen und damit wird das Optimierungsproblem äquivalent zu

$$\begin{aligned}
&- \inf_{(\lambda,\nu)} \quad \sum_{t=1}^{T} \lambda_t T^* \left(\frac{\nu_t}{\lambda_t}\right) \qquad \text{(D3)} \\
&\text{s.t.} \qquad \lambda_t > 0, \quad p_{t-1} = \frac{\lambda_t}{\lambda_{t-1}}(p_t + x_t) - \frac{\nu_t}{\lambda_{t-1}}(x_t - a_t) \qquad t = 1, \ldots, T.
\end{aligned}$$

Auch hier gilt wieder die Konvention $\sup \emptyset = -\infty$.

Wir substituieren $\tau_t := \frac{\nu_t}{\lambda_t}$ und betrachten den Standard-Kupon-Bond, so folgt für die optimalen Lagrange-Faktoren

$$\lambda_t = \frac{\lambda_{t-1}}{1 + r_f(1-\tau_t)} \qquad t = 1, \ldots, T.$$

Durch iteratives Einsetzen erhalten wir

$$\lambda_t = \frac{1}{\prod_{s=1}^{t} \big(1 + r_f(1-\tau_s)\big)} \qquad t = 1, \ldots, T.$$

Schlussendlich erhalten wir, dass (D3) äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} & - \inf_{\tau_t \in \mathrm{dom}(T^*), t=1,\ldots,T} && \sum_{t=1}^{T} \frac{T^*(\tau_t)}{\prod_{s=1}^{t} \big(1 + r_f(1-\tau_s)\big)} && \text{(D*)} \\ & s.t. && p_{t-1} = \frac{p_t + (1-\tau_t)x_t + \tau_t a_t}{1 + r_f(1-\tau_t)} \qquad t = 1, \ldots, T. \end{aligned}$$

Wir können nun den Beweis des Satzes zu Ende führen. Die τ_t sind offensichtlich die impliziten Steuersätze des weiteren Wertpapiers. Dann aber gilt:

1. Da nach Eigenschaft (i) in Lemma 14 alle Summanden in (D*) nichtnegativ sind, gilt $p^* = d^* = 0$ gdw. $T^*(\tau_t) = 0$ ist für alle t, was nach Eigenschaft (ii) in Lemma 14 äquivalent ist zu $\tau_t \in \partial T(0)$ für alle t.

2. Nach Eigenschaft (iii) in Lemma 14 folgt $-\infty < p^* < 0$ gdw. $\tau_t \in \mathrm{dom}(T^*)$ für alle t und für mindestens ein t' ist $\tau_{t'} \in \mathrm{dom}(T^*) \setminus \partial T(0)$.

3. Da es sich in (D*) um eine endliche Summe nicht negativer Summanden handelt, folgt $p^* = \infty$ genau dann, wenn für mindestens ein t gilt $\tau_t \notin \mathrm{dom}(T^*)$.

Impressum:
Arbeitskreis Quantitative Steuerlehre, arqus, e.V.
Vorstand: Prof. Dr. Ralf Maiterth (Vorsitzender),
Prof. Dr. Kay Blaufus, Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler
Sitz des Vereins: Berlin

Herausgeber: Kay Blaufus, Jochen Hundsdoerfer,
Martin Jacob, Dirk Kiesewetter, Rolf J. König,
Lutz Kruschwitz, Andreas Löffler, Ralf Maiterth,
Heiko Müller, Jens Müller, Rainer Niemann,
Deborah Schanz, Sebastian Schanz, Caren Sureth-Sloane, Corinna Treisch

Kontaktadresse:
Prof. Dr. Caren Sureth-Sloane, Universität Paderborn,
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften,
Warburger Str. 100, 33098 Paderborn,
www.arqus.info, Email: info@arqus.info

ISSN 1861-8944